Circuitos Resonantes

4.1 Repaso sobre resonancia.
4.2. Resonancia en líneas de transmisión.
4.3. Resonancia transversal.
4.4. Excitación de resonadores.
4.5. Filtros de microondas.

🕮 Bibliografía:

•D. M. Pozar. “Microwave Engineering”. Capítulos 6 y 8.
•R. E. Collin. “Foundations for Microwave Engineering”. Capítulos 7 y 8

- Objetivos:
  - Comprender el fenómeno de la resonancia en líneas de transmisión.
  - Mostrar un ejemplo de un circuito formado únicamente por líneas de trasmisión con comportamiento equivalente a un circuito formado por elementos concentrados (R, L, C).
  - Aplicar el fenómeno de la resonancia al diseño de filtros de microondas.

4.1 Repaso de conceptos sobre resonancia.

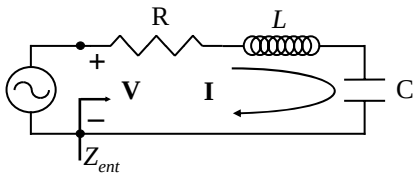
- Índice:
  - 4.1.1. Introducción.
  - 4.1.2. Circuito RLC resonante serie.
  - 4.1.3. Circuito RLC antiresonante paralelo.
  - 4.1.4. Factor de calidad con carga.

4.1.1. Introducción

- Aplicaciones de los resonadores de microondas:
  - Filtros, osciladores, amplificadores sintonizados, ...
- Tipos de resonadores de microondas:
  - Líneas de transmisión.
  - Guía de ondas rectangulares o circulares.
  - Cavidades dieléctricas.
- Cerca de resonancia, el comportamiento del resonador de microondas es modelable como un circuito RLC.

4.1.2. Circuito RLC resonante serie

$$Z_{ent} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}$$



$$P_{consumida} = \frac{1}{2}\Re e\left[VI^*\right] = \frac{1}{2}\Re e\left[Z_{ent}\left|I\right|^2\right] = \frac{1}{2}R\left|I\right|^2 = \frac{1}{2}R\left|\frac{V}{Z_{ent}}\right|^2$$

- Energía magnética media almacenada en la bobina. $W_m = \frac{1}{4}L\left|I\right|^2$
- Energía eléctrica media almacenada en el condensador. $W_e = \frac{1}{4}C\left|V_c\right|^2 = \frac{1}{4}\left|I\right|^2\frac{1}{\omega^2 C}$

4.1.2. Circuito RLC resonante serie

- En resonancia, el circuito RLC cumple que:
  - Las energías medias magnética/eléctrica son iguales:

$$W_m = W_e \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}L\left|I\right|^2 = \frac{1}{4}\left|I\right|^2\frac{1}{\omega^2 C}$$

  - La impedancia de entrada es resistiva pura:

$$Z_{ent} = R \in \Re \quad \Rightarrow \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

- Ambas condiciones se cumplen para la frecuencia de resonancia:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

4.1.2. Circuito RLC resonante serie

- En resonancia el circuito RLC presenta una ***impedancia de entrada*** igual a ***R***.
- La ***potencia consumida*** en el resonador (es decir sus pérdidas) dependen de ***R***.

$$P_{entreg} = \frac{1}{2} R|I|^2$$

- En general, ***R*** será un valor bajo (idealmente CC) de forma que en resonancia la Z_{ent} es muy baja y las pérdidas también.
- Al alejarnos de la resonancia, aumenta la impedancia.

4.1.2. Circuito RLC resonante serie

- Factor de calidad de un circuito resonante.

$$Q = \left(\omega \frac{Energía \quad media \quad almacenada}{Potencia \quad consumida} \right)_{\omega=\omega_r}$$

- Para el caso del circuito RLC resonante serie.

$$Q = \omega_r \frac{W_m + W_e}{P_{consumida}} = \omega_r \frac{\frac{1}{4} L|I|^2 + \frac{1}{4}|I|^2 \frac{1}{\omega_r^2 C}}{\frac{1}{2} R|I|^2} = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r RC}$$

4.1.2. Circuito RLC resonante serie

- Una vez conocido el comportamiento para la frecuencia de resonancia, ***¿cuál es la respuesta del circuito en el entorno de la frecuencia de resonancia?***

$$\omega = \omega_r + \Delta\omega$$

$$Z_{ent} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j\omega L\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right) =$$

$$= R + j\omega L\left(\frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega^2}\right)$$

4.1.2. Circuito RLC resonante serie

- En el entorno de ω_r, $\Delta\omega$ es pequeño y se puede aproximar

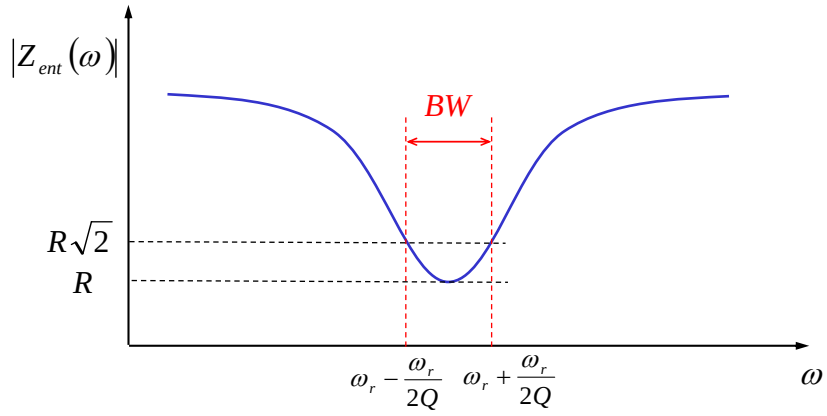
$$\omega^2 - \omega_r^2 = (\omega - \omega_r)(\omega + \omega_r) = \Delta\omega(2\omega - \Delta\omega) \approx 2\omega\Delta\omega$$

$$Z_{ent} \approx R + j\omega L\left(\frac{2\omega\Delta\omega}{\omega^2}\right) = R + j2L\Delta\omega$$

- Luego, en el entorno de la resonancia, el circuito RLC es como una resistencia R, que tiene una parte imaginaria que aumenta con la frecuencia y que depende de L (o de C).
- El comportamiento también se puede modelar a partir de ω_r, R y Q.

$$Z_{ent} \approx R + j\frac{2RQ\Delta\omega}{\omega_r}$$

4.1.2. Circuito RLC resonante serie



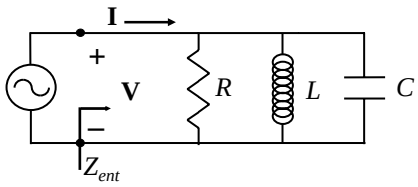
Ancho de banda

$$BW = \frac{\omega_r}{Q}$$

$$BW_{rel} = \frac{BW}{\omega_r} = \frac{1}{Q} = \frac{\Delta f}{f_r}$$

4.1.3. Circuito RLC antirresonante paralelo

$$Y_{ent} = \frac{1}{R} + j\omega C - j\frac{1}{\omega L}$$



$$P_{consumida} = \frac{1}{2}\Re e\left[VI^*\right] = \frac{1}{2}\Re e\left[Y_{ent}^*|V|^2\right] = \frac{1}{2}\frac{|V|^2}{R} = \frac{1}{2R}|IZ_{ent}|^2$$

- Energía magnética media almacenada en la bobina. $W_m = \frac{1}{4}L|I_L|^2 = \frac{1}{4}|V|^2\frac{1}{\omega^2 L}$
- Energía eléctrica media almacenada en el condensador. $W_e = \frac{1}{4}C|V|^2$

4.1.3. Circuito RLC antirresonante paralelo

- En resonancia, el circuito RLC cumple que:
  - Las energías medias magnética/eléctrica son iguales:

$$W_m = W_e \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{4}|V|^2 \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{4} C |V|^2$$

  - La impedancia de entrada es resistiva pura:

$$Z_{ent} = R \in \Re \qquad \Rightarrow \qquad \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

- Ambas condiciones se cumplen para la frecuencia de resonancia:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

4.1.3. Circuito RLC antirresonante paralelo

- En resonancia el circuito RLC presenta una ***impedancia de entrada*** igual a ***R***.
- La ***potencia consumida*** en el resonador (es decir sus pérdidas) dependen de ***R***.

$$P_{entreg} = \frac{1}{2} \frac{|V|^2}{R}$$

- En general, ***R*** será un valor alto (idealmente CA) de forma que en resonancia la Z_{ent} es muy alta y las pérdidas serán bajas.
- Al alejarnos de la resonancia, aumenta la admitancia.

- Factor de calidad de un circuito RLC antirresonante paralelo.

$$Q = \omega_r \frac{W_m + W_e}{P_{consumida}} = \omega_r \frac{\frac{1}{4}\frac{1}{\omega_r^2 L}|V|^2 + \frac{1}{4}C|V|^2}{\frac{1}{2}\frac{|V|^2}{R}} = \omega_r RC = \frac{R}{\omega_r L}$$

- Una vez conocido el comportamiento para la frecuencia de resonancia, ***¿cuál es la respuesta del circuito en el entorno de la frecuencia de resonancia?*** $\omega = \omega_r + \Delta\omega$

$$Y_{ent} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = \frac{1}{R} + j\omega C\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right) =$$

$$= \frac{1}{R} + j\omega C\left(\frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega^2}\right)$$

4.1.3. Circuito RLC antirresonante paralelo

- En el entorno de ω_r, $\Delta\omega$ es pequeño y se puede aproximar

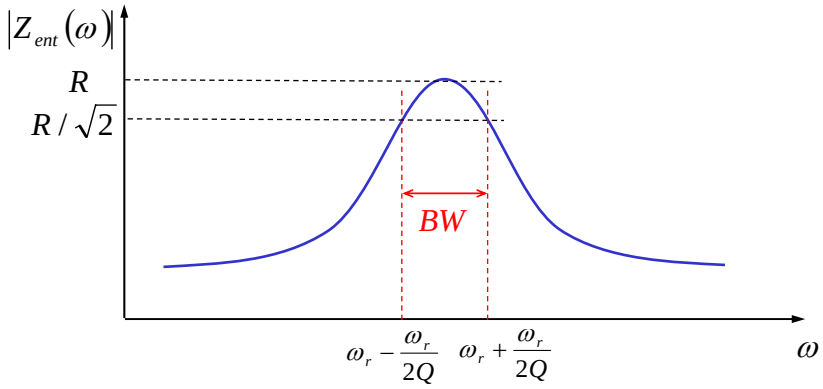
$$\omega^2 - \omega_r^2 = (\omega - \omega_r)(\omega + \omega_r) = \Delta\omega(2\omega - \Delta\omega) \approx 2\omega\Delta\omega$$

$$Y_{ent} \approx \frac{1}{R} + j\omega C\left(\frac{2\omega\Delta\omega}{\omega^2}\right) = \frac{1}{R} + j2C\Delta\omega$$

- En el entorno de la resonancia, el circuito RLC paralelo es como una conductancia *1/R*, con una reactancia en paralelo que aumenta con la frecuencia y que depende de *C* (o de *L*).
- El comportamiento también se puede modelar a partir de ω_r, *R* y *Q*.

$$Y_{ent} \approx \frac{1}{R} + j\frac{2Q\Delta\omega}{R\omega_r}$$

4.1.3. Circuito RLC antirresonante paralelo

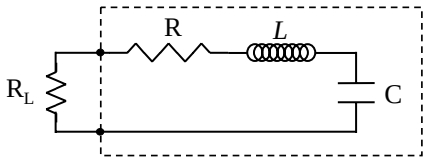


Ancho de banda

$$BW = \frac{\omega_r}{Q}$$

$$BW_{rel} = \frac{BW}{\omega_r} = \frac{1}{Q} = \frac{\Delta f}{f_r}$$

- El factor de calidad visto previamente corresponde al propio circuito resonante cuando éste está aislado. ¿Qué pasa al conectar el resonador con algún circuito externo que lo cargue?
- Ejemplo con RLC serie:



Circuito Resonante

Factor de calidad del resonador aislado:

$$Q = \frac{\omega_r L}{R}$$

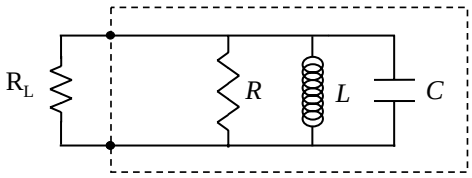
Análogamente, se define un factor de calidad externo Q debido a la carga R_L:

$$Q_e = \frac{\omega_r L}{R_L}$$

Factor de calidad del circuito resonante con carga:

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_e} + \frac{1}{Q}$$

- Para el RLC paralelo:



Circuito Resonante

Q del cto resonante aislado:

$$Q = \frac{R}{\omega_r L}$$

Análogamente, se define un factor de calidad externo Q debido a la carga R_L:

$$Q_e = \frac{R_L}{\omega_r L}$$

Al igual que en el caso del circuito RLC serie, el factor de calidad del circuito resonante con carga vale:

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_e} + \frac{1}{Q}$$

4.2. Resonancia en líneas de transmisión

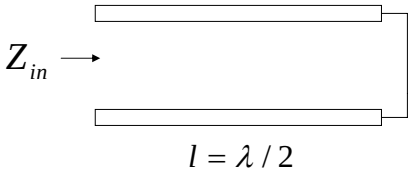
- Índice:
  - 4.2.1. Introducción.
  - 4.2.2. Línea de media onda acabada en cortocircuito.
  - 4.2.3. Línea de media onda acabada en circuito abierto
  - 4.2.4. Línea de cuarto de onda acabada en cortocircuito.

4.2.1. Introducción

- Elementos concentrados no disponibles a altas frecuencias.
- Elementos distribuidos más frecuentes.
- Secciones de línea de transmisión + CC ó CA se comportan como resonadores.
- Estudiamos el Q (factor de calidad) ⟹ pérdidas.

4.2.2. Línea de media onda acabada en cortocircuito

- Linea de $\lambda / 2$, Z_0 y cortocircuitada.



$$Z_{in} = Z_0 \tanh(\alpha + j\beta)l = Z_0 \frac{\tanh \alpha l + j \tan \beta l}{1 + j \tan \beta l \tanh \alpha l}$$

Si $\alpha = 0$ (sin pérdidas) $\Rightarrow$ $Z_{in} = jZ_0 \tan \beta l$

4.2.2. Línea de media onda acabada en cortocircuito

- Bajas pérdidas $\Rightarrow$ $\alpha l \ll 1$ $(\tanh \alpha l \simeq \alpha l)$
- Desviación pequeña $\Rightarrow$ $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$

$$\left.\begin{aligned} \beta l &= \frac{\omega l}{v} = \frac{\omega_0 l}{v} + \frac{\Delta\omega l}{v} \\ l &= \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2f} = \frac{\pi v}{\omega_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \beta l = \pi + \frac{\Delta\omega\pi}{\omega_0}$$

4.2.2. Línea de media onda acabada en cortocircuito

$$\tan \beta l = \tan\left(\pi + \frac{\Delta\omega\pi}{\omega_0}\right) = \tan\frac{\Delta\omega\pi}{\omega_0} \simeq \frac{\Delta\omega\pi}{\omega_0}$$

$$\tanh \alpha l \simeq \alpha l$$

$$Z_{in} \simeq Z_0 \frac{\alpha l + j\dfrac{\Delta\omega\pi}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\Delta\omega\pi}{\omega_0}\alpha l} \simeq Z_0\left(\alpha l + j\frac{\Delta\omega\pi}{\omega_0}\right)$$

4.2.2. Línea de media onda acabada en cortocircuito

- Circuito RLC serie: $Z_{in} = R + j2L\Delta\omega$
- Línea de transmisión: $Z_{in} \simeq Z_0\left(\alpha l + j\dfrac{\Delta\omega\pi}{\omega_0}\right)$
- Identificando: $R = Z_0\alpha l;\ \ L = \dfrac{Z_0\pi}{2\omega_0};\ \ C = \dfrac{1}{\omega_0^2 L}$

4.2.2. Línea de media onda acabada en cortocircuito.

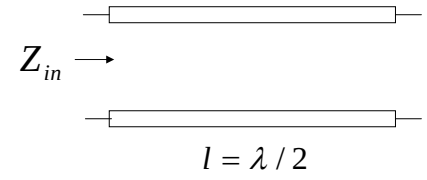
- En resonancia: $\Delta\omega = 0 \Rightarrow Z_{in} = R = Z_0 \alpha l$
- También ocurre resonancia en $l = \frac{n\lambda}{2}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$
- Factor de calidad (1ª resonancia):

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\pi}{2\alpha l} = \frac{\beta}{2\alpha}$$

- Si $\alpha \uparrow \Rightarrow Q \downarrow$

4.2.3. Línea de media onda acabada en circuito abierto

- Linea de $\lambda / 2,\ Z_0$ y en circuito abierto (se suele usar en microstrip).



$$Z_{in} = Z_0 \coth(\alpha + j\beta)l = Z_0 \frac{1 + j \tan \beta l \tanh \alpha l}{\tanh \alpha l + j \tan \beta l}$$

Si $\alpha = 0$ (sin pérdidas) $\Rightarrow Z_{in} = -jZ_0 \cot \beta l$

- Bajas pérdidas $\Rightarrow \alpha l \ll 1 \quad (\tanh \alpha l \simeq \alpha l)$
- Desviación pequeña $\Rightarrow \omega = \omega_0 + \Delta\omega$

$$\left.\begin{aligned} \beta l &= \frac{\omega l}{v} = \frac{\omega_0 l}{v} + \frac{\Delta\omega l}{v} \\ l &= \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2f} = \frac{\pi v}{\omega_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \beta l = \pi + \frac{\Delta\omega\pi}{\omega_0}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tan \beta l = \tan\left(\pi + \frac{\Delta\omega\pi}{\omega_0}\right) = \tan\frac{\Delta\omega\pi}{\omega_0} \simeq \frac{\Delta\omega\pi}{\omega_0} \\ &\tanh \alpha l \simeq \alpha l \end{aligned}\right\} \Rightarrow Z_{in} \simeq Z_0 \frac{1 + j\frac{\Delta\omega\pi}{\omega_0}\alpha l}{\alpha l + j\frac{\Delta\omega\pi}{\omega_0}} \simeq \frac{Z_0}{\alpha l + j\frac{\Delta\omega\pi}{\omega_0}}$$

4.2.3. Línea de media onda acabada en circuito abierto

• Circuito RLC paralelo: $Z_{in} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R} + j2C\Delta\omega}$

• Línea de transmisión: $Z_{in} \simeq \dfrac{Z_0}{\alpha l + j\dfrac{\Delta\omega\pi}{\omega_0}}$

• Identificando: $R = \dfrac{Z_0}{\alpha l}$; $\mathrm{C} = \dfrac{\pi}{2Z_0\omega_0}$; $\mathrm{L} = \dfrac{1}{\omega_0^2 C}$

4.2.3. Línea de media onda acabada en circuito abierto

• En resonancia: $\Delta\omega = 0 \Rightarrow Z_{in} = R = \dfrac{Z_0}{\alpha l}$

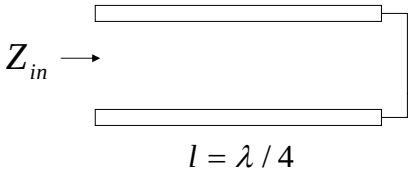
• También ocurre resonancia en $l = \dfrac{n\lambda}{2}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

• Factor de calidad (1ª resonancia):

$$Q = \omega_0 RC = \frac{\pi}{2\alpha l} = \frac{\beta}{2\alpha}$$

• Si $\alpha \uparrow \Rightarrow Q \downarrow$

- Linea de $\lambda / 4,\ Z_0$ y cortocircuitada.



$$Z_{in} = Z_0 \tanh(\alpha + j\beta)l = Z_0 \frac{\tanh \alpha l + j \tan \beta l}{1 + j \tan \beta l \tanh \alpha l}$$

$$= Z_0 \frac{1 - j \tanh \alpha l \cot \beta l}{\tanh \alpha l - j \cot \beta l}$$

- Bajas pérdidas $\Rightarrow \alpha l \ll 1 \quad (\tanh \alpha l \simeq \alpha l)$
- Desviación pequeña $\Rightarrow \omega = \omega_0 + \Delta\omega$

$$\left.\begin{aligned} \beta l &= \frac{\omega l}{v} = \frac{\omega_0 l}{v} + \frac{\Delta\omega l}{v} \\ l &= \frac{\lambda}{4} = \frac{v}{4f} = \frac{\pi v}{2\omega_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \beta l = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\Delta\omega}{2\omega_0}$$

$$\cot \beta l = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi\Delta\omega}{2\omega_0}\right) = -\tan\frac{\pi\Delta\omega}{2\omega_0} \simeq -\frac{\pi\Delta\omega}{2\omega_0}$$

$$\tanh \alpha l \simeq \alpha l$$

$$Z_{in} \simeq Z_0 \frac{1 + j\dfrac{\alpha l \Delta\omega\pi}{2\omega_0}}{\alpha l + j\dfrac{\pi\Delta\omega}{2\omega_0}} \simeq \frac{Z_0}{\alpha l + j\dfrac{\pi\Delta\omega}{2\omega_0}}$$

•Circuito RLC paralelo : $Z_{in} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R} + j2C\Delta\omega}$

•Línea de transmisión: $Z_{in} \simeq \dfrac{Z_0}{\alpha l + j\dfrac{\pi\Delta\omega}{2\omega_0}}$

•Identificando: $R = \dfrac{Z_0}{\alpha l}$; $\mathrm{C} = \dfrac{\pi}{4Z_0\omega_0}$; $\mathrm{L} = \dfrac{1}{\omega_0^2 C}$

4.2.4. Línea de cuarto de onda acabada en cortocircuito

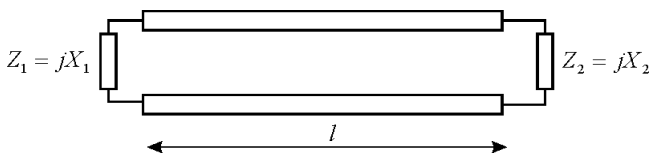
- En resonancia: $\Delta\omega = 0 \Rightarrow Z_{in} = R = \dfrac{Z_0}{\alpha l}$
- Factor de calidad:

$$Q = \omega_0 RC = \frac{\pi}{4\alpha l} = \frac{\beta}{2\alpha}$$

- Si $\alpha \uparrow \Rightarrow Q \downarrow$

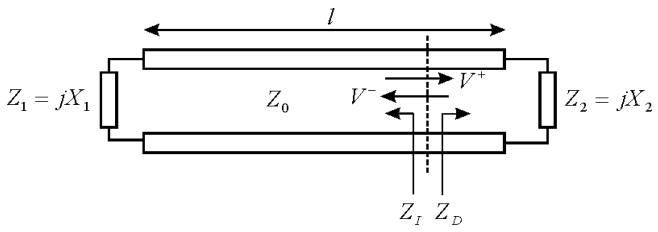
4.3. Resonancia Transversal..

- Secciones resonantes:
  - Línea $\lambda/4\ (+n\lambda/2)$ cortocircuitada en un extremo.
  - Línea $\lambda/2\ (+n\lambda/2)$cortocircuitada en extremos.
  - Línea$\lambda/2\ (+n\lambda/2)$ abierta en extremos.
- Resonancia si reflexión total
  - Impedancia de carga reactiva.
  - Sección de longitud diferente de $\lambda/4$ o $\lambda/2$



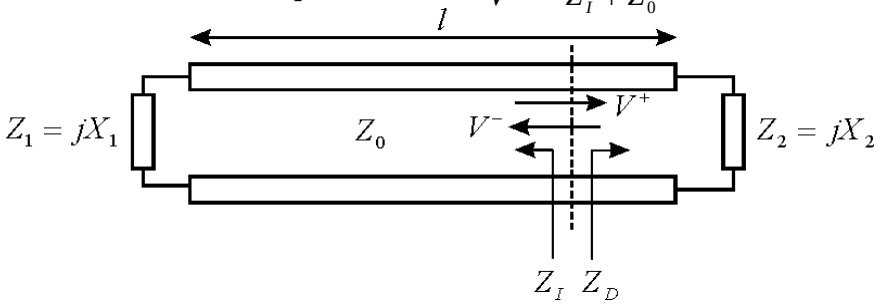
4.3. Resonancia Transversal.

- Resonancia en LT general:
  - Onda estacionaria atrapada entre reflexiones totales.
  - Se elige plano de referencia arbitrario.
  - Las Z_I, Z_D son impedancias vistas hacia la izquierda y derecha del plano.
  - V^+, V^- son las amplitudes de onda positiva y negativa.



4.3. Resonancia Transversal.

- Si miramos a la derecha: $\frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_D - Z_0}{Z_D + Z_0}$
- Si miramos a la izquierda: $\frac{V^+}{V^-} = \frac{Z_I - Z_0}{Z_I + Z_0}$

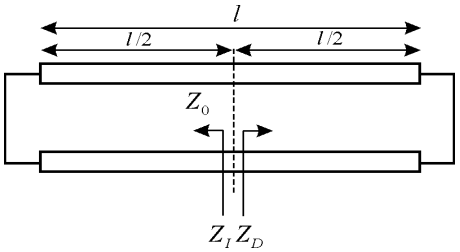


- Igualando los coeficientes:

$$\frac{Z_D - Z_0}{Z_D + Z_0} = \frac{Z_I + Z_0}{Z_I - Z_0} \Rightarrow \begin{cases} Z_I + Z_D = 0 \\ Z_I, Z_D = \pm j\infty \end{cases}$$

- Basta con que se cumpla UNA de las dos condiciones.

- Ejemplo: ¿Bajo que condiciones resuena el circuito?



- Se cumple que $Z_I = Z_D = jZ_0 \tan\left(\beta \frac{l}{2}\right) = \pm j\infty$ si

$$\beta \frac{l}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow l = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

4.3. Resonancia Transversal.

- Se cumple que $Z_I + Z_D = 0$ si ambas son cero (simetría)

$$jZ_0 \tan\left(\beta \frac{l}{2}\right) = 0 \Rightarrow \beta \frac{l}{2} = n\pi \Rightarrow l = n\lambda$$

- Las dos condiciones proporcionan

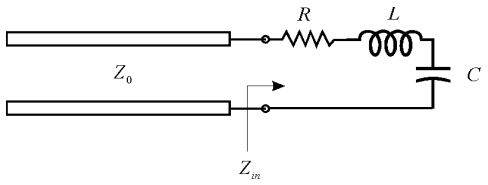
$$l = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, 2\lambda, \ldots \Rightarrow l = n\frac{\lambda}{2}$$

- Comprobad si se obtiene el mismo resultado cogiendo el plano en el cortocircuito de la izquierda (o derecha).

4.4. Excitación de resonadores.

- Índice:
  - 4.4.1. Acoplamiento crítico.
  - 4.4.2. Resonador microstrip con acoplamiento capacitivo.

- Acoplamiento crítico
  - Para máxima transferencia de potencia, resonador y LT que lo alimenta deben estar adaptados a la frecuencia de resonancia.
  - Se dice que el resonador está **acoplado críticamente** a la alimentación.



- La impedancia de entrada cerca de la resonancia es:

$$Z_{in} = R + j2L\Delta\omega = R + j\frac{2RQ\Delta\omega}{\omega_0}$$

- El Q del resonador vale $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$
- En resonancia $Z_{in} = R$ y para adaptar línea y resonador $R = Z_0$
- El Q externo vale $Q_e = \frac{\omega_0 L}{Z_0} = Q$

4.4.1. Acoplamiento crítico

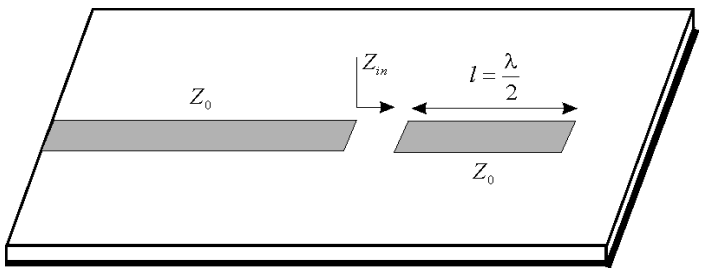
- El factor de acoplamiento se define

$$g = \frac{Q}{Q_e}$$

- Si resonador serie $g = \frac{Z_0}{R}$
- Si resonador paralelo $g = \frac{R}{Z_0}$
- Casos posibles:
  - g=1 (acoplamiento crítico)
  - g<1 (subacoplamiento)
  - g>1 (sobreacoplamiento)

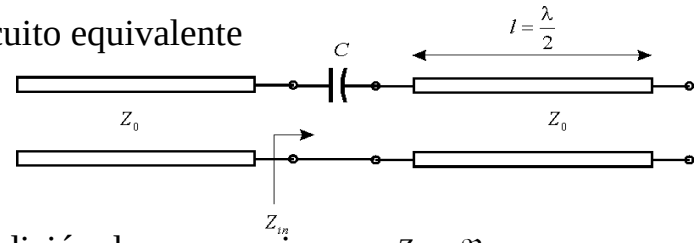
4.4.2. Resonador microstrip con acoplamiento capacitivo

- Consideremos un resonador microstrip en $\lambda / 2$ +CA
- Resonador acoplado a una línea de transmisión que lo alimenta.



4.4.2. Resonador microstrip con acoplamiento capacitivo

- Circuito equivalente



- Condición de resonancia $Z_{in} \in \Re$

$$Z_{in} = -j\frac{1}{\omega C} - jZ_0 \cot \beta l = -j\frac{\tan \beta l + Z_0 \omega C}{\omega C \tan \beta l}$$

$$\tan \beta l = -Z_0 \omega C \Rightarrow \tan\left(\omega \frac{l}{v}\right) = -Z_0 \omega C$$

- Solución gráfica

4.4.2. Resonador microstrip con acoplamiento capacitivo

- Desarrollando en serie de Taylor $\frac{Z_{in}}{Z_0}$ se obtiene:
  - Caso sin pérdidas:

$$\frac{Z_{in}}{Z_0} \approx \frac{j\pi(\omega - \omega_1)}{\omega_1 b_c^2} \qquad b_c = Z_0 \omega C$$

  - Caso con pérdidas:

$$\frac{Z_{in}}{Z_0} = \frac{\pi}{2Qb_c^2} + j\frac{\pi(\omega - \omega_1)}{\omega_1 b_c^2}$$

$$Z_{in}(\omega_1) = R = Z_0 \Rightarrow R = \frac{Z_0 \pi}{2Qb_c^2} = Z_0 \Rightarrow b_c = \sqrt{\frac{\pi}{2Q}}$$

$$g = \frac{R}{Z_0} = \frac{\pi}{2Qb_c^2}$$