



# Fundamentos de los computadores

## TEMA 2. PRINCIPIOS DEL DISEÑO DIGITAL

- Conocer las funciones lógicas y su representación
- Diseñar circuitos lógicos sencillos
- Fundamentos del Álgebra de Boole
- Métodos de simplificación. Mapas de Karnaugh

- Introducción
- Funciones lógicas y tablas de verdad
- Puertas lógicas
- Álgebra de Boole
- Formas canónicas de representar una función lógica
- Simplificación de funciones lógicas
  - Mapas de Karnaugh

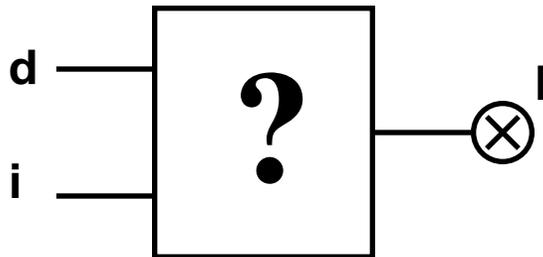
- Transistor
  - Unidad física mínima de diseño digital
- Puerta lógica
  - Unidad lógica mínima de diseño digital
- Circuito combinacional
  - Las salidas sólo dependen del valor de las entradas en el momento actual
    - Ejemplo. Selección de la bebida en una máquina de café

- Circuito secuencial
  - Las salidas dependen del valor actual de las entradas y de la secuencia de valores anteriores (historia) del circuito.
    - Ejemplo. Monedero de una máquina de café
- Unidad funcional
  - Suma de pequeños circuitos que realizan una función definida

- Función lógica
  - Expresión formal del comportamiento de un circuito lógico
  - Permite determinar la salida del circuito en función de las entradas
  - Aridad = número de variables lógicas de entrada
  - Valoración = una de las combinaciones de valores de las entradas

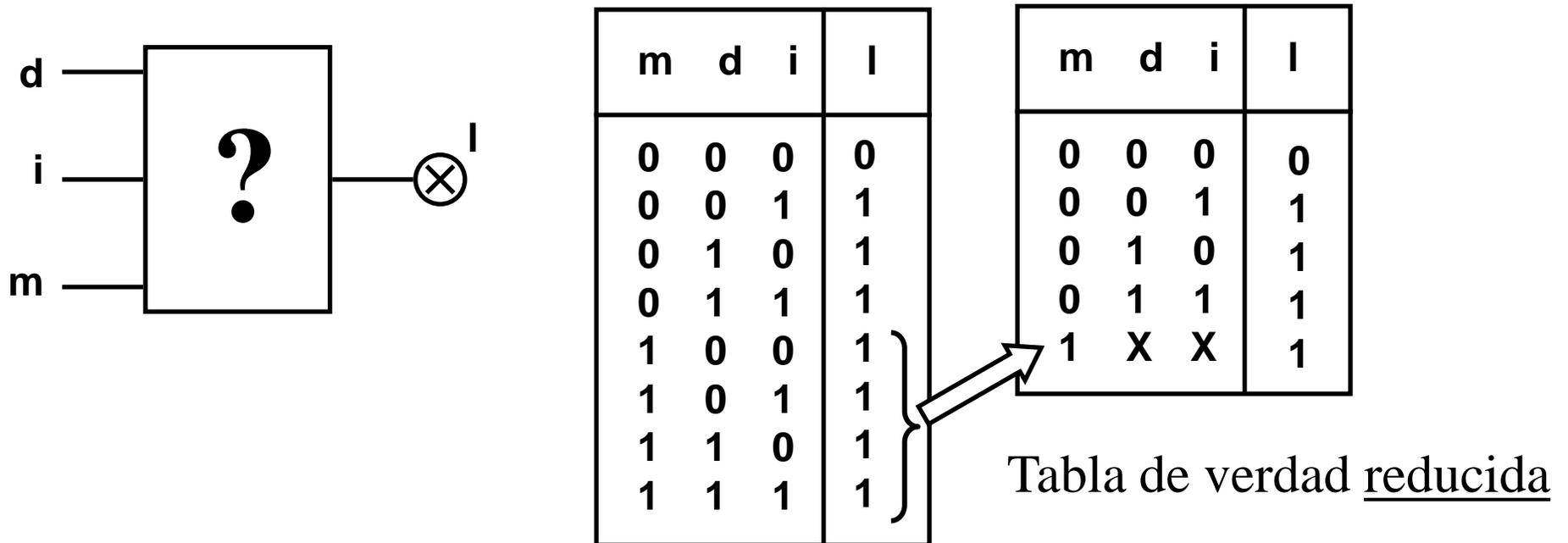
- Tabla de verdad
  - Forma tabular de expresar una función lógica
  - Para cada entrada o salida se asigna una columna
  - Para cada valoración se asigna una fila
  - Entradas a la izquierda, salidas a la derecha
  - Valoraciones siguiendo la numeración binaria

- Luz interior de un coche
  - A partir de dos entradas  $d$ ,  $i$  (puertas derecha e izquierda), diseñad un circuito que encienda una luz  $l$  cuando alguna de las puertas esté abierta



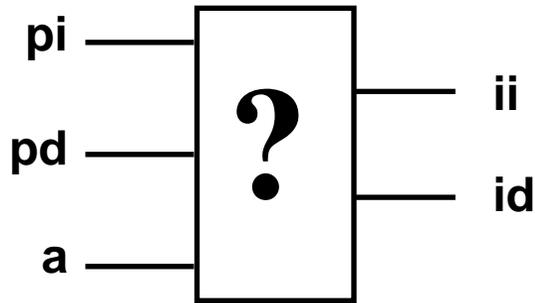
d	i	l
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Luz interior de un coche (ii)
  - Añadir una entrada ***m*** de encendido manual: Si la entrada ***m*** está activada (***m=1***) encender la luz independientemente del estado (abierto/cerrado) de las puertas



- Funciones con entradas indiferentes
  - Aquellas combinaciones de valores de entrada para las que no importa el valor de la salida, por
    - tratarse de una combinación de las entradas para la que no se ha especificado el comportamiento del circuito
    - o tratarse de una combinación de las entradas que es imposible
  - En la tabla de verdad, la salida para estas valoraciones es X

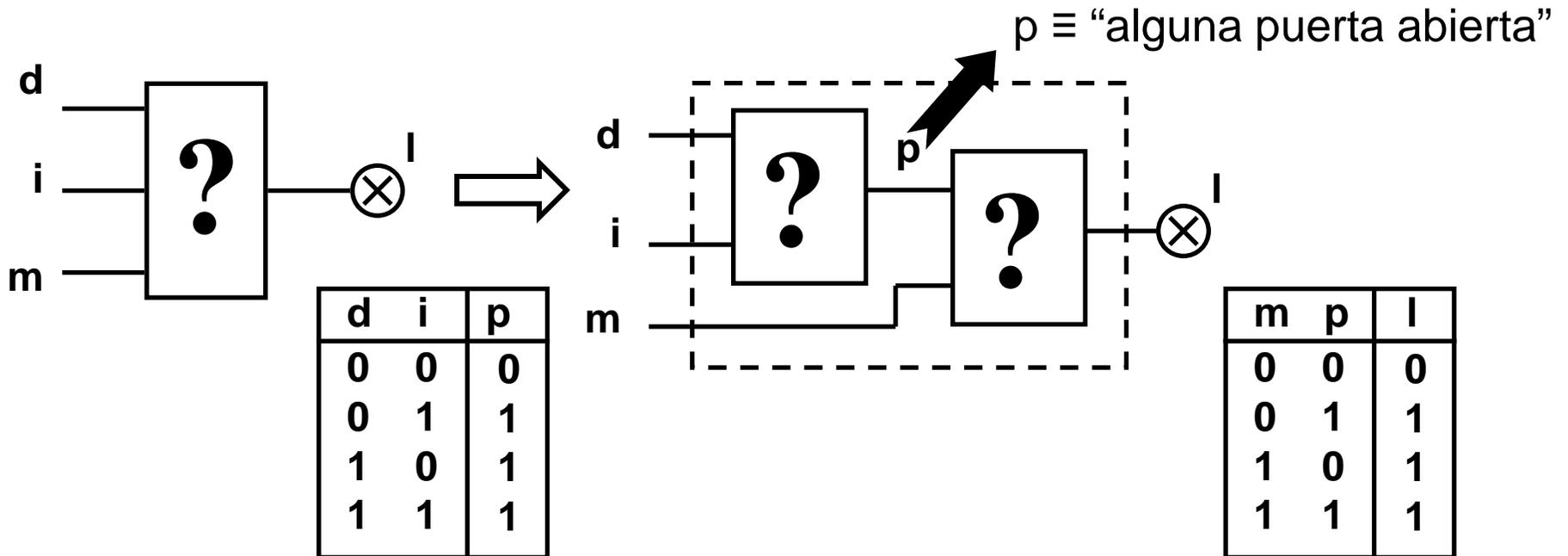
- Intermitentes de un coche
  - A partir de 3 entradas: palanca izquierda (**pi**), palanca derecha (**pd**) y avería (**a**), generar las salidas que activen los intermitentes izquierdo (**ii**) y derecho (**id**)



a	pi	pd	ii	id
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	X	X
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	X	X

Tabla de verdad de una función con entradas indiferentes

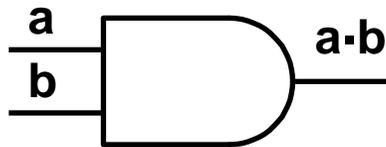
- Función compuesta. Aquella en la que la salida de una (sub)función es utilizada como entrada de otra
- Ejemplo: Luz interior de coche con encendido manual



- Puerta lógica. Circuito electrónico que implementa una función lógica elemental
- Tipos
  - Básicos: AND, OR, NOT
  - Otras: XOR
  - Con salida negada: NAND, NOR, XNOR
- Tecnologías. Base física de construcción
  - TTL, CMOS

## • AND

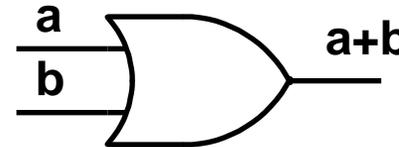
- Producto lógico (“y”)
- Ampliable



b	a	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

## • OR

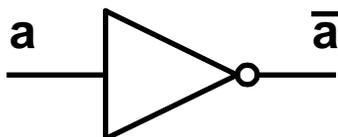
- Suma lógica (“o”)
- Ampliable



b	a	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

## • NOT

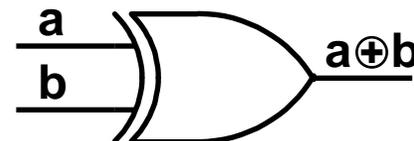
- Negación lógica (“no”)
- No ampliable



a	$\bar{a}$
0	1
1	0

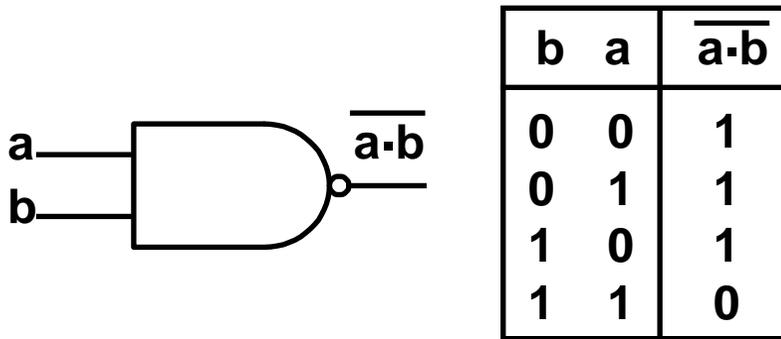
## • XOR

- OR Exclusiva
- No ampliable

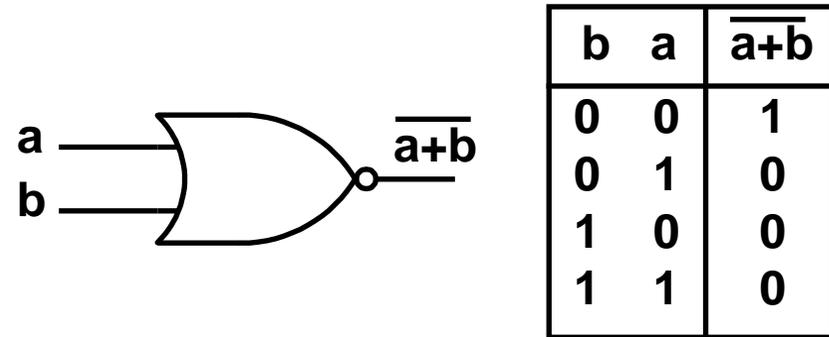


b	a	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

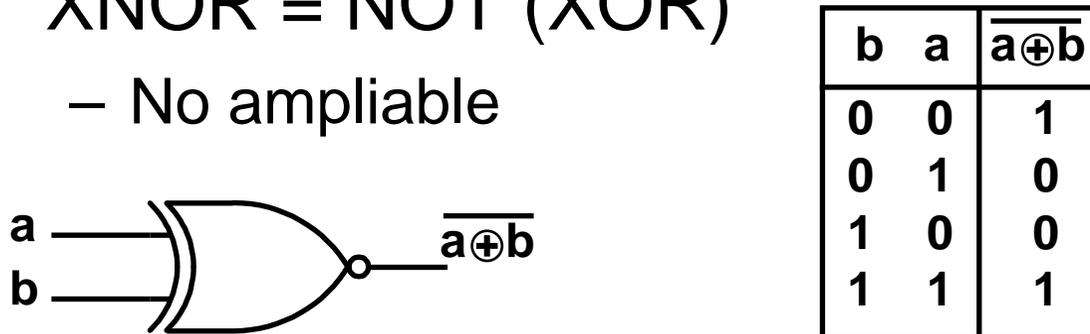
- NAND = NOT (AND)
  - Ampliable



- NOR = NOT (OR)
  - Ampliable

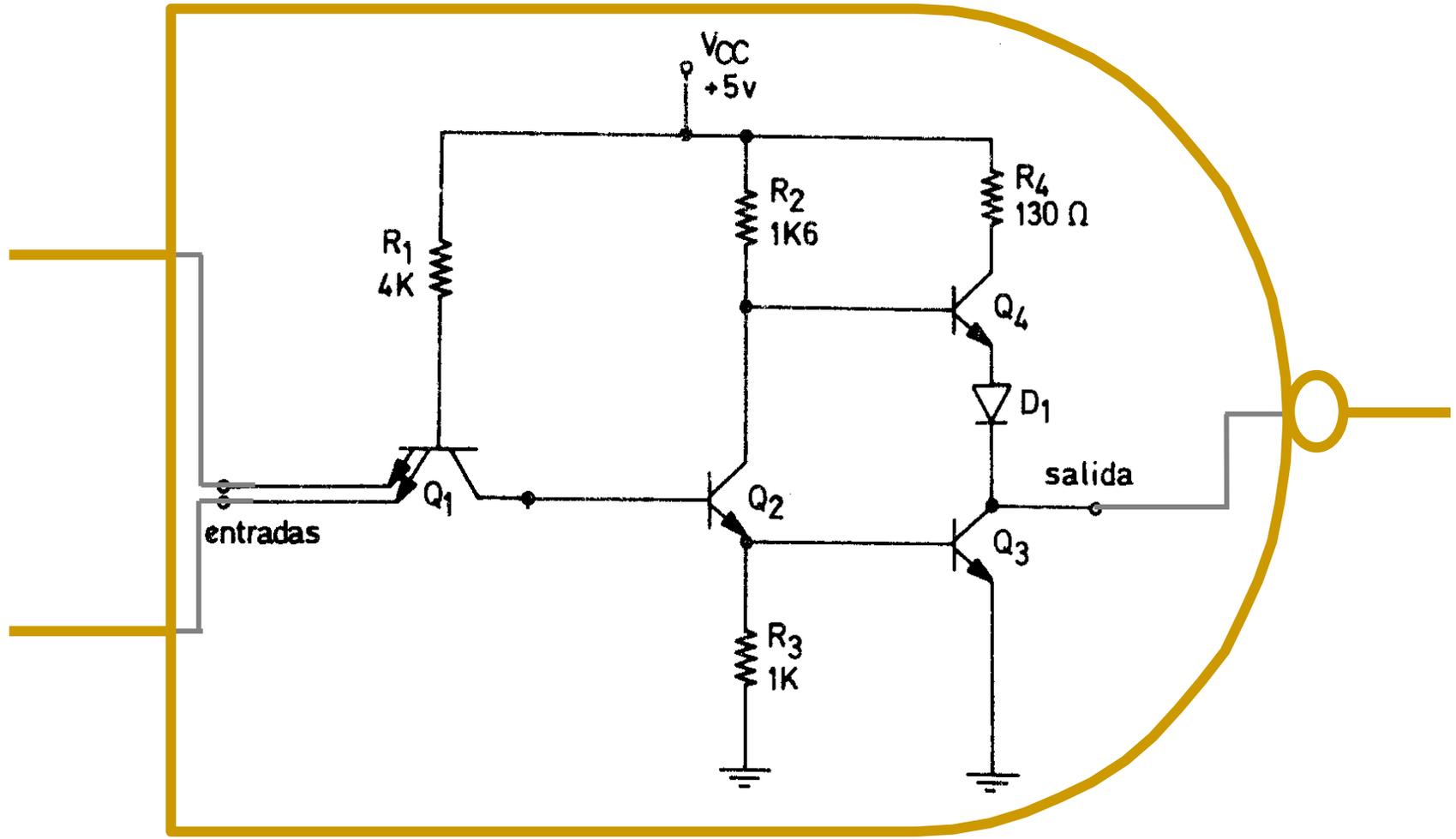


- XNOR = NOT (XOR)
  - No ampliable



- Cada tecnología de construcción emplea diferentes tipos de elementos físicos (transistores) y tensiones para representar los valores lógicos “0” y “1”
- TTL = Transistor-Transistor Logic
  - Basada en transistores bipolares
  - Alta velocidad, alto consumo, difícil integración
- CMOS = Complementary Metal Oxide Semiconductor
  - Basada en transistores MOSFET
  - Menor velocidad, bajo consumo, alta escala de integración

# Esquema físico de una NAND TTL





## 54LS00/DM54LS00/DM74LS00 Quad 2-Input NAND Gates

### Function Table

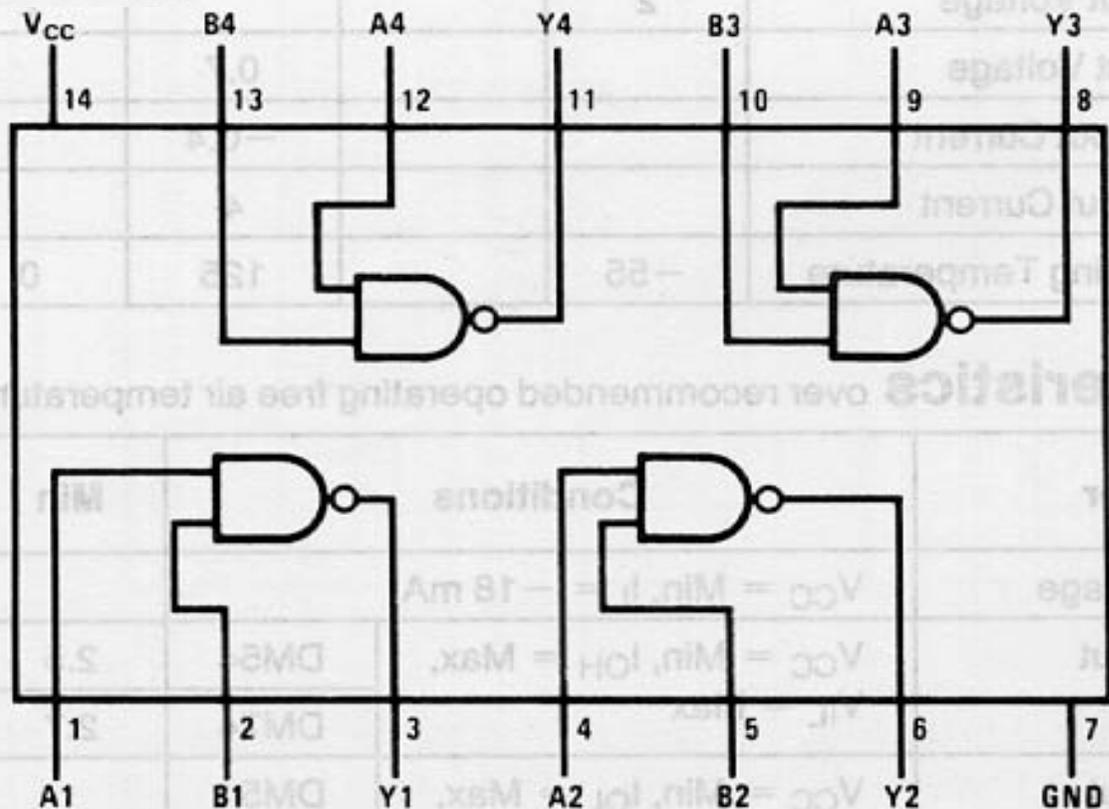
$$Y = \overline{AB}$$

Inputs		Output
A	B	Y
L	L	H
L	H	H
H	L	H
H	H	L

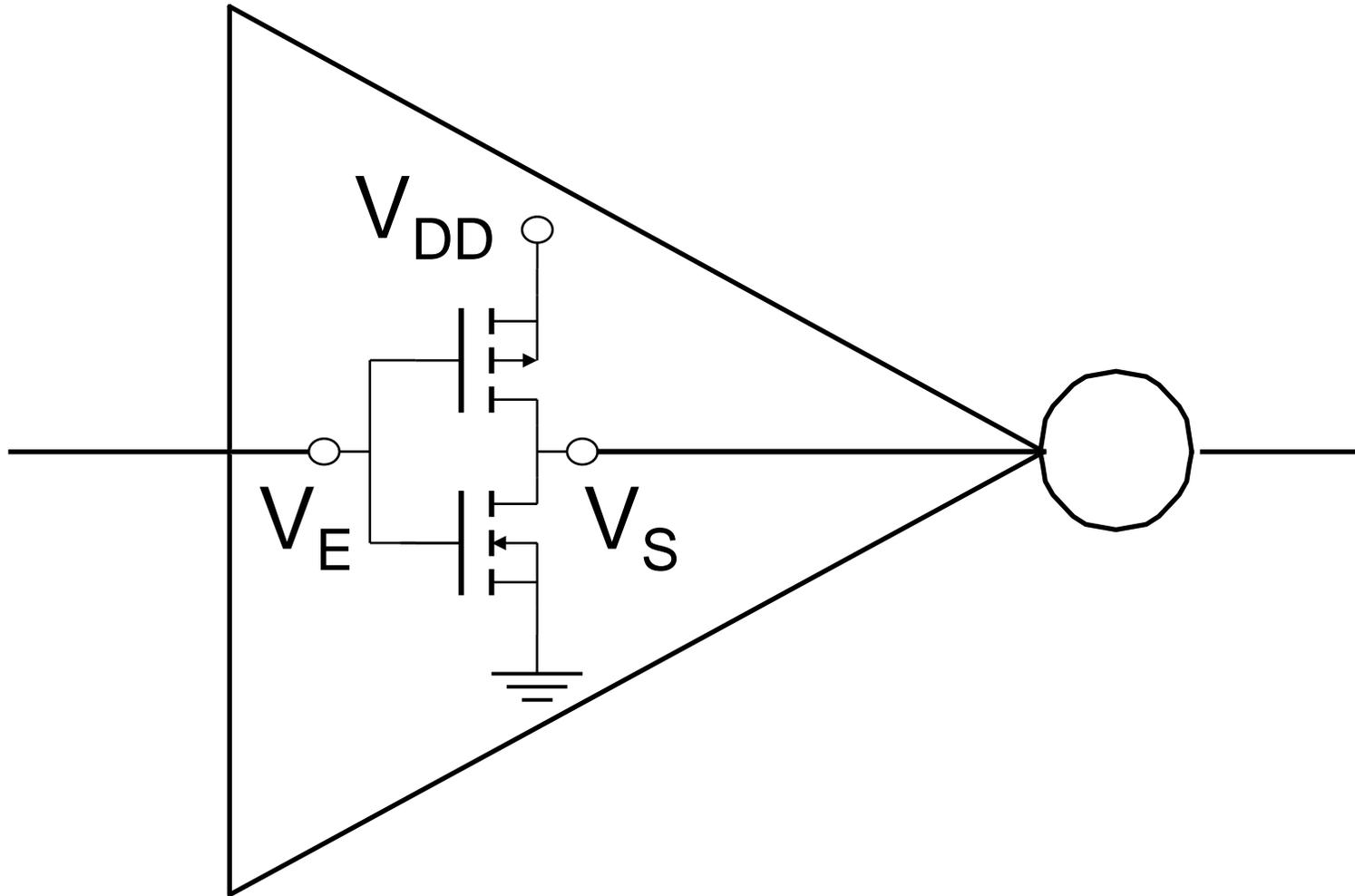
H = High Logic Level

L = Low Logic Level

### Dual-In-Line Package

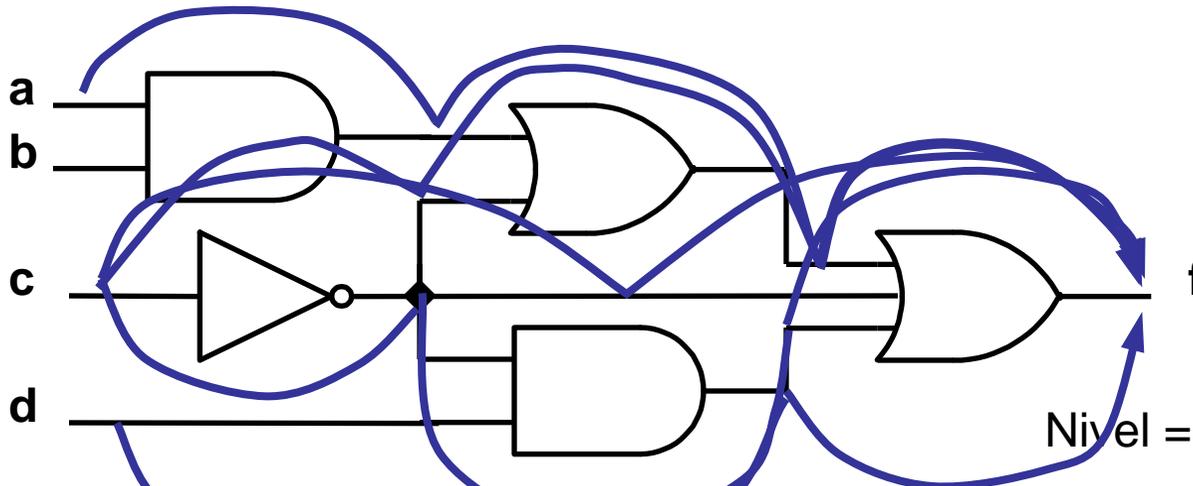


# Esquema físico de un inversor CMOS FCO



- Nivel

- Número de puertas que hay que atravesar en el peor de los casos desde las entradas a las salidas del circuito
- Es una indicación del retardo del circuito
- Cada puerta tiene un retardo  $T$
- Nivel 0 = entradas

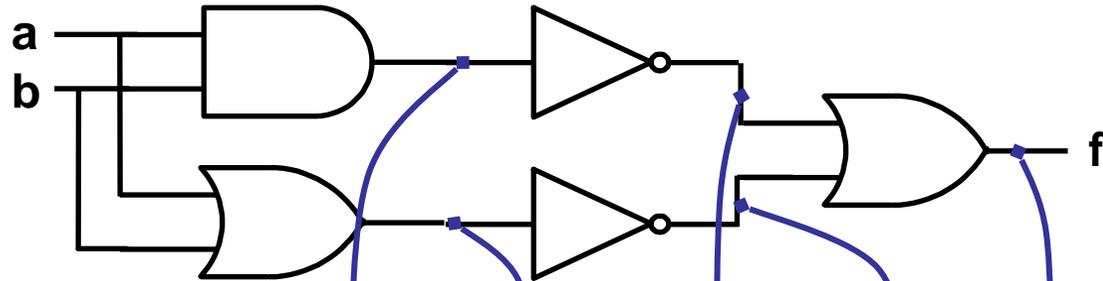


Atraviesa 2 puertas  
 Atraviesa 3 puertas  
 Atraviesa 2 puertas  
 Atraviesa 3 puertas  
 Atraviesa 3 puertas

Nivel = Peor caso = 3 puertas

- Dado un circuito, se trata de obtener su función lógica y tabla de verdad
  - Función lógica: componiendo las subfunciones correspondientes a cada punto del circuito
  - Tabla de verdad: calculando la salida para todas las posibles combinaciones de entrada

- Ejemplo



b	a	$a \cdot b$	$a + b$	$\overline{a \cdot b}$	$\overline{a + b}$	$f = \overline{a \cdot b} + \overline{a + b}$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0

Función lógica

b	a	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabla de verdad

- George Boole (s. XIX)
  - Matemático y filósofo inglés
  - Desarrolla una estructura algebraica con dos valores (“verdadero”, “falso”) y dos leyes de composición interna (“y”, “o”)
  - Permite formalizar las reglas del razonamiento lógico

Precedencia  
(si no hay  
paréntesis)

- Claude Shannon (1938, Lab. Bell)
  - Adapta este álgebra a la computación
    - Valores 0 y 1, leyes de composición AND y OR
  - Permite formalizar las reglas de construcción de circuitos digitales

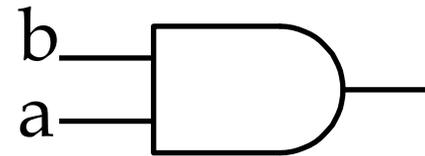
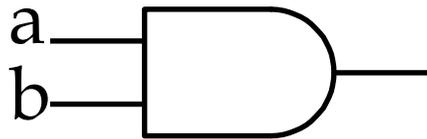
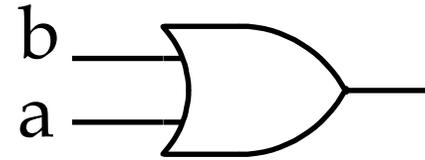
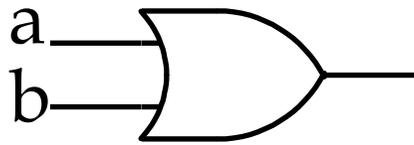
Puerta lógica	Símbolo estándar
AND	•
OR	+
NOT	—
XOR	⊕



- Conmutatividad

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$



- Distributividad

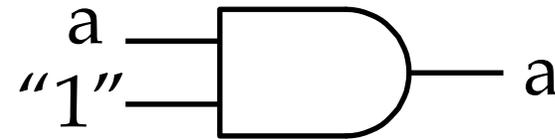
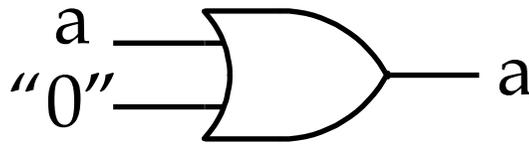
$$(a + b) \cdot (a + c) = a + (b \cdot c)$$

$$(a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot (b + c)$$

- Existencia de elemento neutro

$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 1 = a$$



- Existencia de elemento complementario

$$a + \bar{a} = 1$$

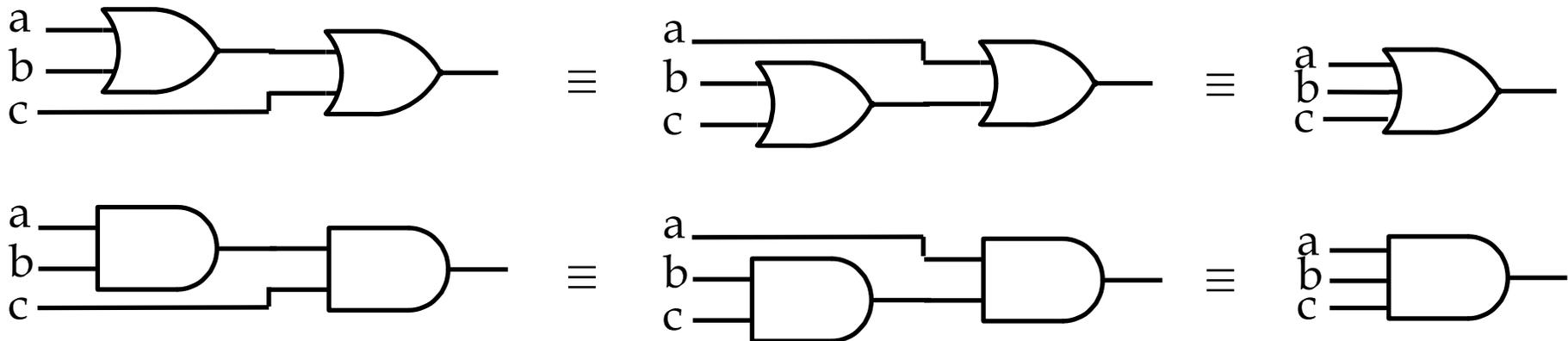
$$a \cdot \bar{a} = 0$$

- Asociativa

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$

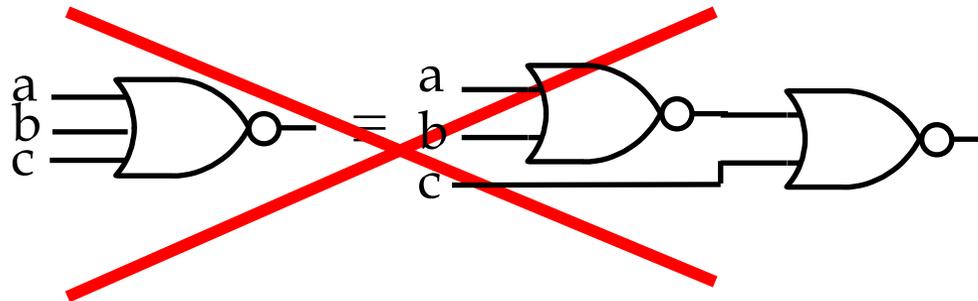
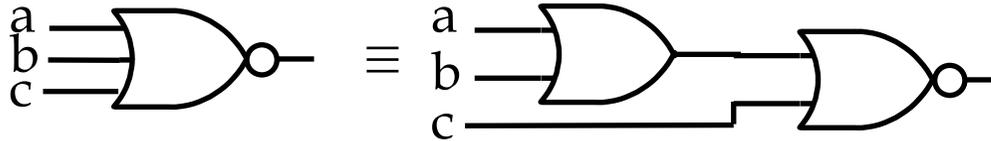
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$$

– Permite construir puertas con mayor número de entradas a partir de puertas más pequeñas:



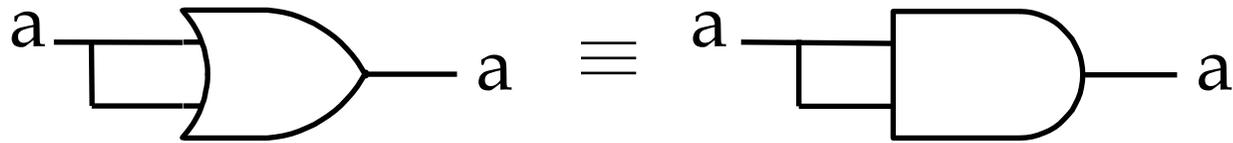
- Asociativa (ii)
  - ¡OJO a las puertas con salida negada!:

$$\overline{a + b + c} = \overline{(a + b) + c}$$



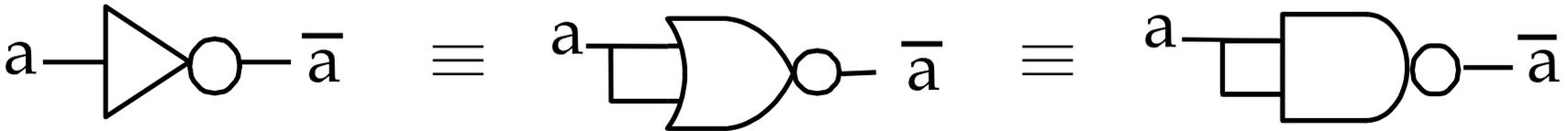
- Idempotencia

$$a + a = a \quad a \cdot a = a$$



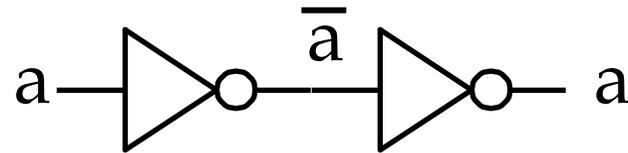
– Permite construir puertas NOT a partir de NAND o NOR

$$\overline{a + a} = \bar{a} = \overline{a \cdot a}$$



- Involución

$$\overline{\overline{a}} = a$$



- Leyes de De Morgan

$$\overline{(a + b + \dots + n)} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \dots \cdot \overline{n}$$

$$\overline{(a \cdot b \cdot \dots \cdot n)} = \overline{a} + \overline{b} + \dots + \overline{n}$$

– ¡OJO!

~~$$\overline{(a + b)} = \overline{a} + \overline{b}$$~~

$$\overline{(a + b)} = \overline{a} \cdot \overline{b} \quad \checkmark$$

- Expresión algebraica única de una función lógica formulada con maxitérminos o minitérminos
- Minitérmino de orden  $n$ 
  - Producto en el que aparecen las  $n$  variables lógicas de entrada
  - Cada variable aparece complementada si su valor es 0
  - Cada valoración da lugar a un minitérmino distinto
  - Los minitérminos se numeran según la cantidad representada por la valoración correspondiente

- Maxitérmino de orden  $n$ 
  - Suma en la que aparecen las  $n$  variables lógicas de entrada
  - Cada variable aparece complementada si su valor es 1
  - Cada valoración da lugar a un maxitérmino distinto
  - Los maxitérminos se numeran según la cantidad representada por la valoración correspondiente

- Forma canónica disyuntiva o suma de productos
  - Suma de los minitérminos pertenecientes a la función
  - Pertenecen a la función los minitérminos correspondientes a las valoraciones para las que la función vale 1

$$\sum_{\text{listade vbles de la función}} (\text{lista numerada de los minitérminos de la función})$$

*listade vbles de la función*

b	a	f	minitérmino	nº
0	0	0	$\bar{b} \cdot \bar{a}$	0
0	1	1	$\bar{b} \cdot a$	1
1	0	0	$b \cdot \bar{a}$	2
1	1	1	$b \cdot a$	3

Forma canónica

$$f = \sum_{b, a} (1, 3) = \bar{b} \cdot a + b \cdot a$$

Expresión algebraica equivalente

- Forma canónica conjuntiva o producto de sumas
  - Producto de los maxitérminos de la función
  - Pertenecen a la función los maxitérminos correspondientes a las valoraciones para las que la función vale 0

$\prod$  (*lista numerada de los maxitérminos de la función*)

*listade vbles de la función*

b	a	f	maxitérmino	nº
0	0	0	$b + a$	0
0	1	1	$b + \bar{a}$	1
1	0	0	$\bar{b} + a$	2
1	1	1	$\bar{b} + \bar{a}$	3

Forma canónica

$$f = \prod_{b, a} (0, 2) = (b + a) \cdot (\bar{b} + a)$$

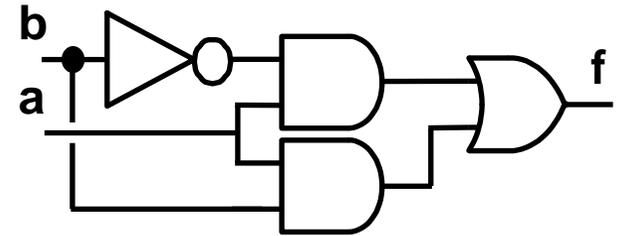
Expresión algebraica equivalente

- Expresión única y compacta de una función lógica.
- Primera aproximación a la síntesis de circuitos a partir de una tabla de verdad:

b	a	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1



$$f = \sum_{b,a} (1, 3) = \bar{b} \cdot a + b \cdot a$$



- Cualquier función lógica puede implementarse mediante un circuito de nivel  $\leq 3$ .

- Formas canónicas para funciones con entradas indiferentes
  - Estas combinaciones se agrupan por separado en sumatorios o productorios del conjunto vacío  $\phi$

	a	pi	pd	id
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	X
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	X

$$id = \sum_{a, pi, pd} (1, 4, 5, 6) + \sum_{\phi} (3, 7)$$

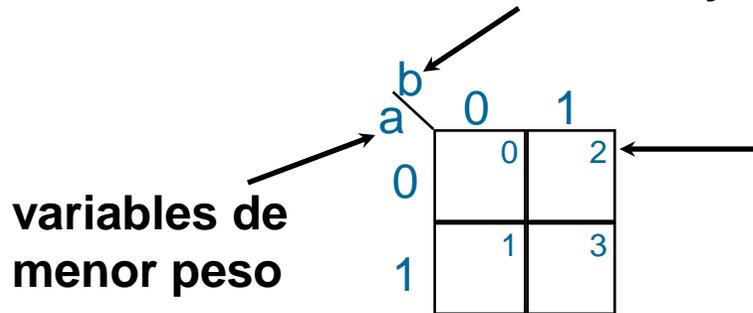
$$id = \prod_{a, pi, pd} (0, 2) \cdot \prod_{\phi} (3, 7)$$

- Simplificar una función
  - Consiste en hallar una expresión algebraica equivalente a la de partida, pero de menor tamaño (menos términos, términos con menos variables)
  - El objetivo es reducir al máximo el circuito con el que se implementa una función lógica
- Metodología
  - Algebraica. Aplicación de axiomas y propiedades del álgebra de Boole
    - Elemento complementario, elemento neutro, distributiva y asociativa
  - Gráfica. Mapas de Karnaugh

- Mapa de Karnaugh
  - Representación matricial de una tabla de verdad
  - Una celda del mapa de Karnaugh representa una fila de la tabla de verdad
  - En cada celda se coloca el valor de una salida de la función
  - La disposición espacial de las celdas es tal que los términos adyacentes de la función lógica están en celdas adyacentes
  - Dos términos se dicen adyacentes si sus valoraciones difieren en el valor de una sola variable
  - Los bordes del mapa de Karnaugh deben considerarse adyacentes

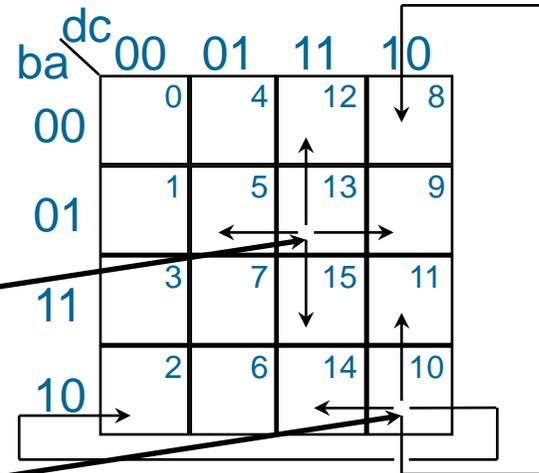
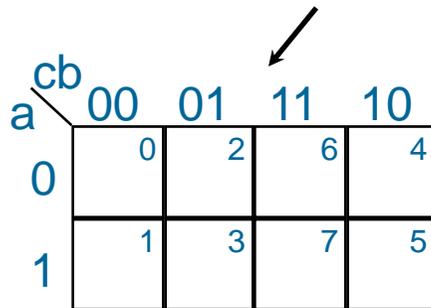
- Mapas para funciones de 2, 3 y 4 variables

variables de mayor peso



número de celda / término ( $2_{10} \Rightarrow b=1, a=0$ )

numeración celdas en código Grey

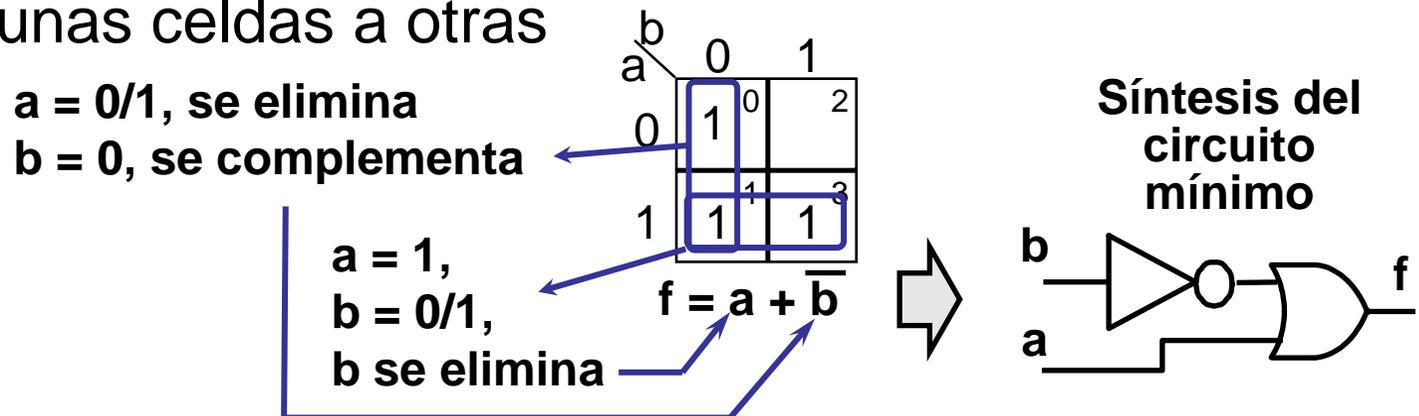


celdas adyacentes a la celda 13

celdas adyacentes a la celda 10

- Método de simplificación
  - Agrupar todas las celdas con el mismo valor, en uno o más grupos
  - Cada grupo contendrá un número de celdas adyacentes potencia de 2
  - Hacer los grupos lo más grande posible
  - El número de grupos debe ser mínimo
  - Una celda puede estar en uno o más grupos

- Agrupar las celdas de valor 1
- Cada grupo representa a un término producto (no minitérmino, puesto que no aparecerán todas las vbles. de la función). Las variables a cero aparecerán complementadas
- Un grupo de  $2^k$  celdas elimina k variables del término resultante, y por tanto tendrá n-k variables
- En cada grupo se eliminan las variables que cambian de valor de unas celdas a otras



# Simplificación por unos. Fundamento FCO

- Cada celda a 1 representa un minitérmino que pertenece a la función

	cb	00	01	11	10	
a		00	01	11	10	
0		0 <sup>0</sup>	1 <sup>2</sup>	1 <sup>6</sup>	0 <sup>4</sup>	Minitérmino 2 (cba=010)
1		1 <sup>1</sup>	0 <sup>3</sup>	0 <sup>7</sup>	0 <sup>5</sup>	Minitérmino 6 (cba=110)
						Minitérmino 1 (cba=001)

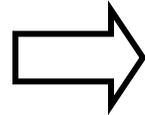
- La función sin simplificar incluiría todos los minitérminos que le pertenecen:

$$f = \sum_{c,b,a} (1, 2, 6) = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot b \cdot \bar{c}$$



- Ejemplos

	cb	00	01	11	10
a					
0		1 <sup>0</sup>	1 <sup>2</sup>	0 <sup>6</sup>	1 <sup>4</sup>
1		1 <sup>1</sup>	1 <sup>3</sup>	0 <sup>7</sup>	0 <sup>5</sup>



	cb	00	01	11	10
a					
0		1	1		1
1		1	1		

$$f = \bar{c} + c \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}$$

**MAL**

	cb	00	01	11	10
a					
0		1	1		1
1		1	1		

$$f = \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b}$$

**BIEN**

	cb	00	01	11	10
a					
0		1 <sup>0</sup>	1 <sup>2</sup>	1 <sup>6</sup>	0 <sup>4</sup>
1		1 <sup>1</sup>	1 <sup>3</sup>	1 <sup>7</sup>	0 <sup>5</sup>



	cb	00	01	11	10
a					
0		1	1	1	
1		1	1	1	

$$f = \bar{c} + c \cdot b$$

**MAL**

	cb	00	01	11	10
a					
0		1	1	1	
1		1	1	1	

$$f = ?$$

**MAL**

	cb	00	01	11	10
a					
0		1	1	1	
1		1	1	1	

$$f = \bar{c} + b$$

**BIEN**

- Ejemplos (cont.)

	dc	00	01	11	10
ba	00	0	1 <sup>4</sup>	1 <sup>12</sup>	8
	01	1	1 <sup>5</sup>	1 <sup>13</sup>	9
	11	3	1 <sup>7</sup>	1 <sup>15</sup>	11
	10	2	1 <sup>6</sup>	1 <sup>14</sup>	10

	dc	00	01	11	10
ba	00	1 <sup>0</sup>	1 <sup>4</sup>	1 <sup>12</sup>	8
	01	1 <sup>1</sup>	1 <sup>5</sup>	1 <sup>13</sup>	9
	11	1 <sup>3</sup>	7	15	11
	10	1 <sup>2</sup>	6	14	10

	dc	00	01	11	10
ba	00	1 <sup>0</sup>	1 <sup>4</sup>		1 <sup>8</sup>
	01	1 <sup>1</sup>	5	1 <sup>13</sup>	9
	11	3	7	15	1 <sup>11</sup>
	10	2	6	14	10

	dc	00	01	11	10
ba	00	1 <sup>0</sup>	4	12	1 <sup>8</sup>
	01	1	1 <sup>5</sup>	13	9
	11	3	7	1 <sup>15</sup>	11
	10	1 <sup>2</sup>	6	14	1 <sup>10</sup>

- Agrupar las celdas de valor cero
- Cada grupo representa un término suma (no maxitérmino, puesto que no aparecerán todas las variables de la función). Las variables de valor uno aparecerán complementadas
- Un grupo de  $2^k$  celdas elimina  $k$  variables del término resultante, y por tanto tendrá  $n-k$  variables
- En cada grupo se eliminan las variables que cambian de valor de unas celdas a otras

		cb			
		00	01	11	10
a	0	1 <sup>0</sup>	1 <sup>2</sup>	1 <sup>6</sup>	0 <sup>4</sup>
	1	1 <sup>1</sup>	1 <sup>3</sup>	1 <sup>7</sup>	0 <sup>5</sup>

**a = 0/1, se elimina**  
**b = 0, se incluye**  
**c = 1, se complementa**

$$f = \bar{c} + b$$

- Ejemplos

dc	00	01	11	10	
ba	00	0	4	12	8
01	1	5	13	9	
11	3	0 <sup>7</sup>	0 <sup>15</sup>	11	
10	2	0 <sup>6</sup>	0 <sup>14</sup>	10	

$$f = (\bar{d} + c) \cdot (\bar{c} + \bar{b})$$

cb	00	01	11	10	
a	0	0	2	0 <sup>6</sup>	4
1	1	3	0 <sup>7</sup>	0 <sup>5</sup>	

dc	00	01	11	10	
ba	00	0	4	12	8
01	0 <sup>1</sup>	5	13	0 <sup>9</sup>	
11	0 <sup>3</sup>	7	15	0 <sup>11</sup>	
10	0 <sup>2</sup>	6	14	0 <sup>10</sup>	

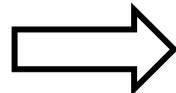
dc	00	01	11	10	
ba	00	0	4	12	8
01	1	0 <sup>5</sup>	0 <sup>13</sup>	0 <sup>9</sup>	
11	3	0 <sup>7</sup>	0 <sup>15</sup>	0 <sup>11</sup>	
10	2	6	14	0 <sup>10</sup>	

dc	00	01	11	10	
ba	00	0	4	12	8
01	1	5	0 <sup>13</sup>	0 <sup>9</sup>	
11	0 <sup>3</sup>	0 <sup>7</sup>	0 <sup>15</sup>	11	
10	0 <sup>2</sup>	0 <sup>6</sup>	0 <sup>14</sup>	0 <sup>10</sup>	

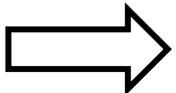
dc	00	01	11	10	
ba	00	0	4	12	8
01	1	0 <sup>5</sup>	0 <sup>13</sup>	0 <sup>9</sup>	
11	0 <sup>3</sup>	0 <sup>7</sup>	0 <sup>15</sup>	0 <sup>11</sup>	
10	2	0 <sup>6</sup>	0 <sup>14</sup>	0 <sup>10</sup>	

– Las celdas con “x” se toman como si tuvieran valor uno o valor cero, cada una como mejor convenga, para maximizar la simplificación.

d	c	b	a	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	x
0	0	1	0	0
0	0	1	1	x
0	1	0	0	0
0	1	0	1	x
0	1	1	0	x
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	x
1	0	1	1	1
1	1	0	0	x
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1



$$f = \sum_{d,c,b,a} (7, 11, 13, 14, 15) + \sum_{\phi} (1, 3, 5, 6, 10, 12) = \prod_{d,c,b,a} (0, 1, 2, 4, 8, 9) \cdot \prod_{\phi} (1, 3, 5, 6, 10, 12)$$



dc \ ba	00	01	11	10
00	0 <sup>0</sup>	0 <sup>4</sup>	x <sup>12</sup>	0 <sup>8</sup>
01	x <sup>1</sup>	x <sup>5</sup>	1 <sup>13</sup>	0 <sup>9</sup>
11	x <sup>3</sup>	1 <sup>7</sup>	1 <sup>15</sup>	1 <sup>11</sup>
10	0 <sup>2</sup>	x <sup>6</sup>	1 <sup>14</sup>	x <sup>10</sup>

“por unos”

dc \ ba	00	01	11	10
00	0 <sup>0</sup>	0 <sup>4</sup>	x <sup>12</sup>	0 <sup>8</sup>
01	x <sup>1</sup>	x <sup>5</sup>	1 <sup>13</sup>	0 <sup>9</sup>
11	x <sup>3</sup>	1 <sup>7</sup>	1 <sup>15</sup>	1 <sup>11</sup>
10	0 <sup>2</sup>	x <sup>6</sup>	1 <sup>14</sup>	x <sup>10</sup>

“por ceros”

# Simplificación. Entradas indiferentes (ii) FCO

- Errores comunes:
  - Tomar todas las "x" por 0 o por 1

	dc	00	01	11	10
ba					
00		0 <sup>0</sup>	0 <sup>4</sup>	x <sup>12</sup>	0 <sup>8</sup>
01		x <sup>1</sup>	x <sup>5</sup>	1 <sup>13</sup>	0 <sup>9</sup>
11		x <sup>3</sup>	1 <sup>7</sup>	1 <sup>15</sup>	1 <sup>11</sup>
10		0 <sup>2</sup>	x <sup>6</sup>	1 <sup>14</sup>	x <sup>10</sup>

**MAL**

	dc	00	01	11	10
ba					
00		0 <sup>0</sup>	0 <sup>4</sup>	x <sup>12</sup>	0 <sup>8</sup>
01		x <sup>1</sup>	x <sup>5</sup>	1 <sup>13</sup>	0 <sup>9</sup>
11		x <sup>3</sup>	1 <sup>7</sup>	1 <sup>15</sup>	1 <sup>11</sup>
10		0 <sup>2</sup>	x <sup>6</sup>	1 <sup>14</sup>	x <sup>10</sup>

**MAL**

- Hacer grupos con "x" innecesarios

	dc	00	01	11	10
ba					
00		0 <sup>0</sup>	0 <sup>4</sup>	x <sup>12</sup>	0 <sup>8</sup>
01		x <sup>1</sup>	x <sup>5</sup>	1 <sup>13</sup>	0 <sup>9</sup>
11		x <sup>3</sup>	1 <sup>7</sup>	1 <sup>15</sup>	1 <sup>11</sup>
10		0 <sup>2</sup>	x <sup>6</sup>	1 <sup>14</sup>	x <sup>10</sup>

**MAL**

	dc	00	01	11	10
ba					
00		0 <sup>0</sup>	0 <sup>4</sup>	x <sup>12</sup>	0 <sup>8</sup>
01		x <sup>1</sup>	x <sup>5</sup>	1 <sup>13</sup>	0 <sup>9</sup>
11		x <sup>3</sup>	1 <sup>7</sup>	1 <sup>15</sup>	1 <sup>11</sup>
10		0 <sup>2</sup>	x <sup>6</sup>	1 <sup>14</sup>	x <sup>10</sup>

**MAL**



# Fundamentos de los computadores

## TEMA 2. PRINCIPIOS DEL DISEÑO DIGITAL